

Комбинаторика

Определение комбинаторики

Комбинаторика —

раздел математики, изучающий способы подсчёта различных комбинаций и перестановок элементов в заданных условиях. Она применяется в теории вероятностей, статистике, информатике, криптографии и других областях.

Основные понятия

- **Множество** — совокупность элементов, объединённых по какому-либо признаку.
- **Элемент множества** — отдельный объект, входящий в множество.
- **Выбор** — процесс отбора элементов из множества.
- **Расположение** — упорядочивание выбранных элементов.
- **Комбинация** — набор элементов, отобранных из множества (может быть упорядоченным или неупорядоченным).

Основные правила комбинаторики

Правило суммы: если объект A можно выбрать m способами, а объект B — n способами, причём выбор A и выбор B не пересекаются, то выбрать либо A , либо B можно $m+n$ способами.

Формально: если $A \cap B = \emptyset$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Пример: в корзине 5 яблок и 3 груши. Выбрать один фрукт можно $5+3=8$ способами.

Правило произведения: если объект A можно выбрать m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то для пары (A, B) есть $m \cdot n$ вариантов выбора.

Формально: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Пример: есть 4 рубашки и 3 пары брюк. Составить комплект «рубашка + брюки» можно $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Основные типы комбинаторных соединений

Перестановки —

упорядоченные наборы из n элементов, отличающиеся только порядком расположения.

- Число перестановок из n элементов: $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.
- **Пример:** сколько способов расставить 3 книги на полке? $P_3 = 3! = 6$.

Размещения —

упорядоченные наборы из k элементов, выбранных из n ($k \leq n$), отличающиеся составом и/или порядком.

- Число размещений из n по k : $A_{nk} = (n-k)!n!$.
- **Пример:** сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя из 10 студентов? $A_{102} = 8!10! = 90$.

Сочетания —

неупорядоченные наборы из k элементов, выбранных из n , отличающиеся только составом.

- Число сочетаний из n по k : $C_{nk} = (kn) = k!(n-k)!n!$.
- **Пример:** сколькими способами можно выбрать 3 человека из 7 для участия в олимпиаде? $C_{73} = 3!4!7! = 35$.

Важные свойства и формулы

- Симметрия сочетаний: $(kn) = (n-kn)$.
- Рекуррентное соотношение (треугольник Паскаля): $(kn) = (k-1n-1) + (kn-1)$.

- Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
- Сумма всех сочетаний: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Перестановки с повторениями

Если среди n элементов есть повторяющиеся (например, n_1 элементов первого типа, n_2 — второго и т. д., причём $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), то число различных перестановок:

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Пример: сколько различных слов можно составить из букв слова «МАМА»?
Всего 4 буквы, «М» повторяется 2 раза, «А» — 2 раза. Число перестановок: $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

Сочетания и размещения с повторениями

Сочетания с повторениями —

выбор k элементов из n типов с возможностью повторения элементов одного типа. Число таких сочетаний:

$$C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Пример: сколькими способами можно купить 5 пирожных в кондитерской, где есть 3 сорта? $C_{3+5-1}^5 = C_{7}^5 = 21$.

Размещения с повторениями —

упорядоченный выбор k элементов из n с возможностью повторения. Число таких размещений:

$$A_{n+k-1}^k = n^k$$

Пример: сколько существует трёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3 (цифры могут повторяться)? $A_{3+3-1}^3 = 3^3 = 27$.

Принцип включения-исключения

Используется для подсчёта элементов в объединении пересекающихся множеств. Для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Для трёх множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Пример: из 30 студентов 15 изучают английский, 12 — немецкий, 8 — оба языка. Сколько студентов не изучают ни один из этих языков?

1. Изучают хотя бы один язык: $|A \cup B| = 15 + 12 - 8 = 19$.
2. Не изучают ни один: $30 - 19 = 11$ студентов.

Применение комбинаторики

- **Теория вероятностей:** подсчёт числа благоприятных и всех возможных исходов.
- **Криптография:** анализ стойкости шифров.
- **Информатика:** алгоритмы сортировки, поиска, генерации комбинаций.
- **Статистика:** планирование экспериментов.
- **Биология:** анализ генетических комбинаций.
- **Экономика:** оптимизация ресурсов.